ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ 2000

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. $y - f(x_o) = f\,'(x_o)(x - x_o)$

Α2. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 218

Β1. α. Λ , β. Λ, γ. Σ

Β2 . α→3 , β→1 , γ→5 , δ→2

ΘΕΜΑ 2ο

$f(z) = \dfrac{2z + i}{\overline{z} - 2i}$, $z \neq -2i$

α. • $w_1 = f(9-5i) = \dfrac{2(9-5i)+i}{9+5i-2i} = \dfrac{18-9i}{9+3i} = \dfrac{6-3i}{3+i} =$

$$= \frac{(6-3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{(6-3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{18-6i-9i-3}{9+1}$$

$$= \frac{15-15i}{10} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$$

$\rho = |w_1| = \sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ οπότε $συνφ = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

και $ημφ = \dfrac{-\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

επομένως $φ = -\dfrac{\pi}{4}$

Άρα $w_1 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\left(συν\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + iημ\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

• $w_2 = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{3} f(9-5i)\right]^{2004} = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\left(συν\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + iημ\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)\right]^{2004}$

$$= συν\left(-\frac{2004\cdot\pi}{4}\right) + i\,ημ\left(-\frac{2004\cdot\pi}{4}\right)$$

$$= \sigma\upsilon\nu(-501\pi) + i\,\eta\mu(-501\pi)$$
$$= \sigma\upsilon\nu(-500\pi-\pi) + i\,\eta\mu(-500\pi-\pi)$$
$$= \sigma\upsilon\nu(-\pi) + i\,\eta\mu(-\pi)$$

β. $M = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix} \dfrac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

και όπως ξέρουμε από την θεωρία, σωστό είναι το Β

γ. $K = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2} & -\eta\mu\dfrac{\pi}{2} \\ \eta\mu\dfrac{\pi}{2} & -\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, οπότε $MX = K \Leftrightarrow X = M^{-1}\cdot K$ **(1)**

Όμως $M^{-1} = \dfrac{1}{|M|}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Οπότε η (1) γίνεται $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

ΘΕΜΑ 3ο

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0\,,1]$ με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0\,,1)$,
$f(0) = 2$, $f(1) = 4$

α. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει μία ακριβώς λύση στο $(0,\ 1)$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 3$

Η g είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ (πράξεις συνεχών) με

$g(0) = f(0) - 3 = 2 - 3 = -1 < 0$ και

$g(1) = f(1) - 3 = 4 - 3 = 1 > 0$ οπότε

$g(0)g(1) < 0$

Επομένως, με βάση το θεώρημα Bolzano, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,\ 1)$ έτσι ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 3$.

Επειδή όμως $g'(x) = f'(x) > 0$, η g είναι γνησίως αύξουσα άρα η λύση είναι μοναδική

β. $0 < \frac{1}{5} < 1$ και η f είναι γνησίως αύξουσα $\Rightarrow$ $f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) < f(1)$

ομοίως $f(0) < f\left(\frac{2}{5}\right) < f(1)$

$f(0) < f\left(\frac{3}{5}\right) < f(1)$

$f(0) < f\left(\frac{4}{5}\right) < f(1)$

Προσθέτουμε : $4f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) < 4f(1) \Leftrightarrow$

$$f(0) < \frac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} < f(1) \quad \textbf{(1)}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ και $f(0) \neq f(1)$, λόγω της (1) και με βάση το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει $x_1 \in (0,\ 1)$ ώστε

$$f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$$

γ. Η f είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\ 1)$ άρα με βάση το θεώρημα της μέσης τιμής θα υπάρχει $x_2 \in (0,\ 1)$ ώστε $f'(x_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 2$

Αυτό σημαίνει ότι η εφαπτομένη στο σημείο $(x_2\ ,\ f(x_2))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2000$

ΘΕΜΑ 4ο

$$f(t) = \frac{\alpha t}{1+\left(\frac{t}{\beta}\right)^2}\ , \quad t \geq 0$$

α. Αφού η f, για $t = 6$, παρουσιάζει μέγιστο ίσο με 15, έχουμε $f(6) = 15$

Επίσης αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο $t = 6$ του $[0,\ +\infty)$ και παρουσιάζει μέγιστο σε αυτό, με βάση το θεώρημα Fermat, θα ισχύει $f'(6) = 0$.

Όμως $\quad f\,'(t) = \dfrac{\alpha(\beta^2 - t^2)}{\beta^2\left(1+\dfrac{t^2}{\beta^2}\right)^2}$ $\quad$ οπότε $\quad f\,'(6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(\beta^2 - 36) = 0$

και επειδή α, β θετικές σταθερές θα είναι $\beta = 6$.

Επίσης $\quad f(6) = 15 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{6\alpha}{1+\left(\dfrac{6}{6}\right)^2} = 15 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 5$

β. Θα πρέπει να ισχύει $\quad f(t) \geq 12 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{5t}{1+\left(\dfrac{t}{6}\right)^2} \geq 12$

$$t^2 - 15t + 36 \leq 0$$

$$3 \leq t \leq 12$$